

# ЕКОНОМІКО- МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 339.13

**КАРПОВИЧ Андрій**, к. е. н., провідний науковий співробітник сектора аналітичних досліджень Українського центру розвитку інформаційних технологій

## ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ КРИТИЧНИХ ПОДІЙ У РИНКОВИХ ПРОЦЕСАХ

*Розглянуто теоретичні основи моделювання ринкових процесів. Наведено модель оцінки стійкості поведінки незамкнених ринкових процесів. Запропоновано один з можливих підходів до моделювання ринкових процесів з використанням моделі прогнозування стійкості поточного ринкового тренду.*

*Ключові слова:* модель, ринкові процеси, прогнозування тренду, аналіз стану системи.

*Карпович А. Проблемы исследования критических событий в рыночных процессах. Рассмотрены теоретические основы моделирования рыночных процессов. Приведена модель оценки устойчивости поведения незамкнутых рыночных процессов. Предложен один из возможных подходов к моделированию рыночных процессов с использованием модели прогнозирования стойкости текущего рыночного тренда.*

*Ключевые слова:* модель, рыночные процессы, прогнозирование тренда, анализ состояния системы.

**Постановка проблеми.** Актуальність результатів дослідження обумовлена постійно зростаючою потребою людства в удосконаленні моделей прогнозування нестационарних економічних і ринкових процесів. Еволюція економічних систем вимагає постійного удосконалення та уточнення існуючих законів їх розвитку. Послідовне моделювання фінансових ринків залишається відкритою і дискусійною проблемою.

Нелінійність ринкових процесів спричиняє одну з основних труднощів їх вивчення та прогнозування: оскільки наслідки у загальній кількості не пропорційні причинам, то дві причини при взаємодії не адитивні, тобто наслідки є складнішими, ніж проста суперпозиція. Вони є функціями причин. Тобто при дослідженні статистичних залежностей складних процесів в економіці результат, отриманий для двох причин, що діють одночасно у відкритій системі, не є сумою результатів, отриманих у присутності кожної з причин окремо.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Існує цілий ряд підходів до розуміння і прогнозування нелінійних ринкових процесів. Дослідженню цієї проблематики присвячено праці таких вчених, як Г. Медведєв [1; 2], Д. Сорнете [3], С. Росс, Дж. Кокс, Дж. Інгерзолл [4], Ф. Блек, М. Шоулз [5], Дж. Лінтнер [6], Г. Марковиць [7], В. Шарп [8], Р. Мертон [9] та ін.

Нині проблема детерміністичних моделей прогнозування стоїть дуже гостро, про що свідчать періодично виникаючі кризи фінансових і фондових ринків. Варіація цін у загальному вигляді представляється як результат впливу двох факторів: детермінованого миттєвого збільшення ціни і випадкового збільшення. При цьому модель випадкового приросту ціни спирається на закон Нормального розподілу, середнє відхилення по Гаусу.

**Метою** дослідження є вивчення основних підходів до аналізу ринкових процесів та розробка моделі стану системи в процесі наближення до критичних подій.

**Матеріали та методи.** При проведенні дослідження використовувались методи: статистичний, графічний, апроксимації функцій диференціальних рівнянь, математичного та економічного моделювання, наукової абстракції.

**Результати дослідження.** Формуючи один з можливих підходів до моделювання ринкових процесів з використанням моделі прогнозування стійкості поточного ринкового тренду, доцільно розглянути ситуацію з продажу активів на ринку. Фундаментальна торгівля фінансовими інструментами ґрунтується на різниці між ринковою вартістю компанії і чистою вартістю її активів. Аналітик, як правило, встановлює свою ціну фундаментальної вартості компанії і далі порівнює її з ціною, зареєстрованою на фондовому ринку. Якщо остання нижче ніж визначена ціна, існує можливість купити, оскільки аналітик очікує, що фондовий ринок незабаром усвідомить, що акції недооцінені порівняно з їх реальною ціною. Як наслідок, хвиля наказів на покупку утворює висхідний тренд до досягнення фундаментальної вартості.

Однак насправді існують значні труднощі у визначенні точної оцінки, оскільки не зрозуміло, як оцінювати деякі важливі нематеріальні активи компанії (такі, як якість її менеджерів, становище на ринку, престиж компанії тощо). Крім того, прогнозування доходів у майбутньому апіорі не є чітко визначеним. З цього випливає, що залежність чистого розміру наказу є нелінійною:

$$\Omega(t) = \ln(P) - \ln(P_f), \quad (1)$$

де  $\Omega$  – чистий розмір наказу (у грошових одиницях);  $P$  – ціна;  $P_f$  – фундаментальна вартість, яка визначається дисконтуванням очікуваних у майбутньому дивідендів і таким чином залежить від прогнозу їх темпів зростання і безризикової ставки відсотка.

Таким чином, фундаментальну вартість дуже складно визначити з високою точністю, і вона оцінюється зі значною похибкою.

Наприкінці 1990-х років американськими вченими Муліганом і Сала-І-Мартіном проведено дослідження, яке довело, що еластичність попиту на гроші до процентної ставки (чутливість логарифмічної похідної грошового попиту до процентної ставки) дуже мала при низьких ставках відсотка, і навпаки, при великих процентних ставках або великому потенційному обсязі інвестування, є значущою.

Це можна описати як приклад порогової поведінки, що характеризується нелінійною залежністю:

$$e = \frac{d \ln(M)}{d \ln(r)} = \left( \frac{r}{r_{infl}} \right)^m, \quad (2)$$

де  $e$  – еластичність грошового попиту  $M$  при  $m > 1$ .

Коли ставка відсотка  $r$  незначно перевищує рівень інфляції  $r_{infl}$ , еластичність у розрахунок не береться, оскільки  $\lim \left( \frac{r}{r_{infl}} \right)^m = 1$ . З того

факту, що ціна, будь вона заниженою або завищеною щодо фундаментальної ціни ( $P_f$ ), в будь-який момент часу прямує до неї, можна визначити, що всі стратегії, засновані на оцінці ( $P$ ), ведуть до розвороту ціни. Ця повертаюча сила може бути лінійною до чистого розміру наказу ( $\Omega$ ). Такий взаємозв'язок має на увазі, що:

$$\ln(P_{t+1}) - \ln(P_{t_0}) = \ln(P_{t_0}) - \ln(C_f), \quad (3)$$

де  $C_f$  – фундаментальна вартість активу.

Ці взаємини є точним аналогом рівняння осцилятора (без загасання), такого, як маятник: починаючи з позиції, віддаленої від свого стану нерухомої рівноваги, він здійснює нескінченні коливання навколо цієї точки рівноваги (рис. 1).

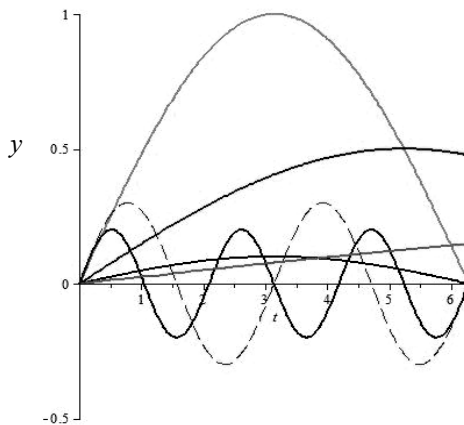


Рис. 1. Тимчасова залежність логарифма ціни, нормована фундаментальною ціною [3]

Причиною осциляції є те, що у сили, яка розвертає, є інерція, через що сила не зникає досить довго, що й веде до зміни напрямку. Таке перерегулювання з великою ймовірністю запускає цінову динаміку в продовженому напрямку, яка сама відхиляється від свого фундаментального значення. Коли фундаментальний поворотний ( $C_f$ ) член нелінійний, осциляції зберігаються, але міняють форму. Їх основна властивість полягає в тому, що їх частота (зворотна періоду, інтервалу між двома послідовними максимумами) стає залежною від амплітуди відхилення ринкової ціни від фундаментальної вартості. Ця властивість дуже важлива, оскільки, якщо існують будь-які інші результати або перешкоди, що мають тенденцію видозмінювати амплітуду, частота буде відповідно змінена [3]. Така нелінійна залежність частоти від амплітуди створює механізм для прискорення частот, коли амплітуда починає демонструвати лавиноподібне зростання. У загальному випадку воно має такий вигляд:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - \left(\alpha \frac{d}{dt}\right) + y(t) = 0. \quad (4)$$

Розв'язання цього динамічного рівняння включає "інерцію", нелінійне проходження тренду і нелінійне фундаментально-вартісне інвестування (рис. 2).

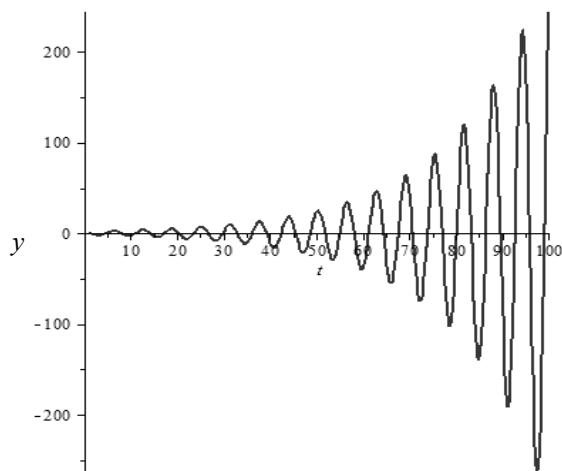


Рис. 2. Графічна інтерпретація розв'язання динамічного рівняння

Поняття "інерція" введено в модель через те, що рішення інвестувати в точці  $t_0$  принесе свої результати тільки в точці  $t_{n+1}$ , тобто в майбутньому, в той час як воно саме ґрунтується на аналізі подій минулого часу  $t_{n-1}$ . Необхідно відзначити, що виникає нелінійна тенденція, що призводить до виникнення звичайно-часової сингулярності в амплітуді відхилень між ринковою та фундаментальною ціною [3].

Розвиваючи ідею про коливальні процеси в ринкових трендах, доцільно розглянути загальний випадок для оцінки стійкості поведінки незамкнених процесів.

Основною гіпотезою, що покладена в основу розробки моделі, є те, що в момент оцінки поточного стану відкритої системи (ринкового тренда) її стійкість обернено пропорційно межі зміни швидкості приросту обсягу угод (операційного матеріалу процесу) за одиницю часу. Іншими словами, суб'єкти ринку починають реагувати на флуктуації системи за коштами зворотного зв'язку, яка накладається на шум тренда. Стосовно механізму повернення ринкової ціни до фундаментальної і навпаки, буде доречним припустити, що в майбутньому обов'язково існує точка розвороту, дійшовши якої наявний тренд порушить свій локальний закон поведінки. Для кожної конкретної системи дослідним шляхом можна визначити ймовірність колапсу в точці розвороту тренду згідно з проведеними розрахунками.

Розглянемо довільний ринковий процес. Під час детального статистичного вивчення встановлено, що будь-який ринковий процес, в якому можна виявити певну закономірність, яку, у свою чергу, можна апроксимувати функцією типу  $a \cdot \sin(t) + C$ , що має свою "інерцію" відносно прямої осі часу. Отримавши функцію, яка описує процес, одержимо можливість досліджувати її властивості стандартними методами аналізу і обчислити межі зміни в деяких критичних точках, що дасть уявлення про характер подальшого розвитку системи.

Якщо виразити межі приросту функції в певній точці, що характеризує швидкість зміни процесу, то можна визначити, що "інерція" також буде залежати і від операційного обсягу процесу (активів). Так, структура оборотного капіталу окремої компанії змінюється обернено-пропорційно до величини його похідної на визначеному проміжку часу. Те ж саме стосується і ринкових процесів, описаних вище.

Ряд статистичних тестів дав можливість визначити, що в основу побудови ринкових процесів або визначення ймовірності обвалу (підйому) ринків, завжди покладено якусь критичну точку в домені часу. Іншими словами, кардинальний розворот тренду завжди обумовлений наближенням до деякої точки в часі. Ознакою критичного розвороту є ступеневе прискорення ціни, її волатильності і коефіцієнта загрози краху.

Для складних економічних процесів важливим критерієм оцінки стану для прогнозування є ступінь прискорення ймовірності розвороту напрямку. Так, для фондових ринків коефіцієнт ймовірності краху визначається, як швидкість зміни ймовірності від часу. Воно може збільшуватися безмежно в міру того, як ймовірність обвалу наближається до критичної точки. Концепція того, що крах пов'язаний з критичною точкою, представляється у вигляді виконання ступеневого закону:

$$\ln(p(t)) = A + B(t_0 - t)^\beta, \beta \in [0;1], \quad (5)$$

де  $A$  – фундаментальна ціна фінансового активу;

$B$  – приріст ціни, обчислений відповідно до ступеневого закону.

Основними факторами процесу є такі величини, як: швидкість нарощування операційного обсягу, ступінь волатильності (період і амплітуда) і ступінь відхилення від точки рівноваги або лінії тренду [3].

Таким чином, можна отримати рівняння стану системи у певний момент часу та визначити ступінь віддаленості від ймовірної критичної події. Загальний випадок матиме такий вигляд:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) - \left(\alpha \frac{d}{dt} y(t)\right) + y(t) - 2\pi = 0, \quad (6)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт приросту амплітуди волатильності ціни.

Вирішуючи це рівняння з початковими параметрами, можна отримати функцію, що описує межі зміни стійкості системи відносно часової осі. Параметр  $\alpha$  задає відносний приріст амплітуди і розглядається в рамках моделі як граничне прирощення середньоквадратичного відхилення в околицях точки з початковими умовами. Потрібно відзначити, що часовий масштаб необхідно також підбирати окремо в рамках локального тренду та аналізувати стан системи у декількох часових горизонтах, що надасть більш детальну інформацію про ймовірність настання критичної події. На графіку масштаби обох осей ціни і часу вибрані довільно (рис. 3).

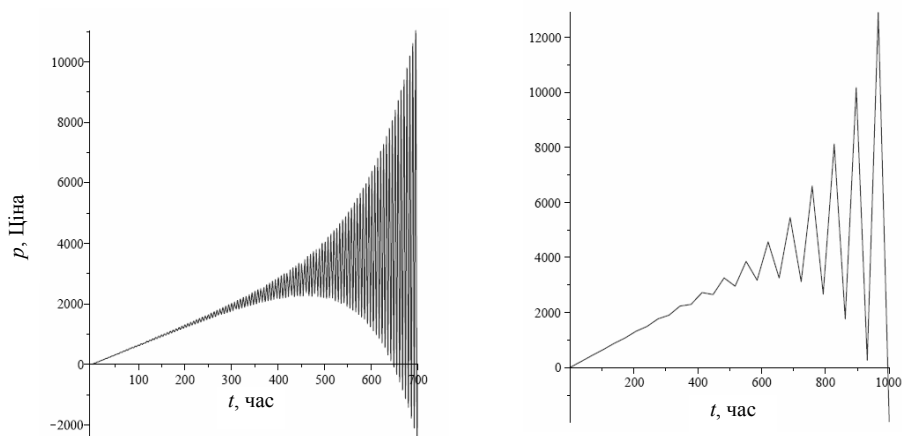


Рис. 3. Функція стійкості поточного ринкового тренду (процесу)

Перший нуль функції на осі  $t$  свідчить про настання критичного стану системи на околицях цього моменту часу. Для різних початкових умов ця подія настає в різний час і з різною інтенсивністю (див. рис. 3).

Таким чином, первинний аналіз стійкості системи зводиться до пошуку нуля функції в певному часовому проміжку. Досліджуючи отриману функцію, очевидним стає, що можливість існування нуля функції на заданому часовому проміжку є не що інше, як співвідношення кута медіани і приросту амплітуди коливання. Звідси можна зробити висновок, що можлива така ситуація, коли за відповідних умов функція не матиме нулів у осяжному майбутньому  $\{t; t_n\}$  (рис. 4).

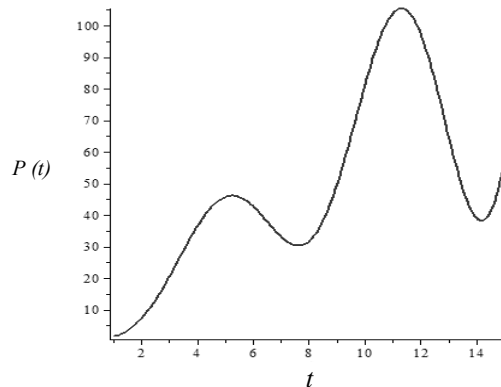


Рис. 4. Локально-стійкий процес, який представлений розбіжною функцією

Це свідчить про відносну стійкість системи для аналізованого періоду. В рамках представленої моделі можна спостерігати ефект нелінійної залежності фундаментальної вартості, інвестування якої спільно з "інерцією" спричиняє нелінійні осциляції, що залежать від амплітуди відхилення між ринковою та фундаментальною ціною, а також від кута між медіаною функції та тимчасовою віссю.

**Висновки.** Виходячи з отриманих результатів за рядом статистичних тестів, запропонована модель оцінки стійкості ринкових процесів є альтернативою раніше представленим моделям. Серед її явних переваг – масштабованість у часі і відносно невелика похибка передбачення, в рамках 10–15 %, що для імовірнісних моделей прогнозування стохастичних процесів є досить прийнятною. Ця модель універсальна для опису та прогнозування багатьох інших економічних процесів, схожих з описаними характеристиками, що робить її перспективною для подальшого вивчення і розвитку.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Медведев Г. А.* Вероятностные методы исследования экстремальных систем : науч. изд. / Г. А. Медведев, В. П. Тарасенко. — М. : Наука, 1967. — 456 с.
2. *Медведев Г. А.* Стохастические модели процентных ставок / Г. А. Медведев. — LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, 2011. — 286 с.
3. *Сорнетте Д.* Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в сложных финансовых системах / Д. Сорнетте. — М. : Smart-Book, 2008. — 399 с.
4. *Cox J.* A Theory of term structure of interest rate / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // *Econometrica*, 1985. — Vol. 53. — P. 385–407.
5. *Black F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // *Journal of Political Economy*. — 1981. — Vol. 3. — P. 637–654.
6. *Linther J.* The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / J. Linther // *Review of Economics and Statistics*. — 1965. — Vol. 47. — P. 13–37.
7. *Markowitz H.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of investment / H. Markowitz. — New York : Wiley, 1959.

8. Sharpe W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk / W. Sharpe // Journal of Finance. — 1964. — Vol. 19. — P. 425–442.
9. Merton R. An intertemporal capital asset pricing model / R. Merton // Econometrica. — 1973. — Vol. 41. — P. 867–888.

Стаття надійшла до редакції 01.09.2014.

**Karpovych A. Problems of critical study of events of market process.**

**Background.** The relevance of research results is due to the ever increasing need of mankind to improve models predicting unsteady economic and market processes. The evolution of economic systems requires continuous improvement and refinement of existing laws of development. Consistent modeling of financial markets remains open and controversial issue.

**Analysis of recent research and publications** showed that despite certain scientific achievements, important scientific and practical problem of forecasting critical events in the market process remains.

**The aim** is to study the basic approaches to the analysis of market processes and develop a model of system status during the approach to critical events.

**Material and methods.** The study used the following methods: statistical, graphical, function approximation of differential equations, mathematical and economic modeling, scientific abstraction.

**Results.** Theoretical foundations of market processes modeling were studied. The model that describes the state of the market according to the hypothesis that the time of the evaluation of the current state of open systems (market trend) its resistance is inversely proportional to the speed limits change rates of contracts (surgical material process) per unit time was developed. One of the possible approaches to market processes modeling using models predicting the stability of the current market trend was offered.

**Conclusion.** Based on the results of a number of statistical tests proposed model for evaluating the stability of market processes is an alternative to the models presented earlier. Among its advantages are scalability in time and a relatively small error of predictions within the 10–15% that is quite acceptable for probabilistic forecasting models of stochastic processes. This model is cross-functional for describing and predicting many economic processes similar to those described characteristics, making it promising for further exploration and development.

**Keywords:** model, market processes, trend forecasting, system condition analysis.

REFERENCES

1. Medvedev G. A. Veroyatnostnye metody issledovaniya jekstremal'nyh sistem : nauch. izd. / G. A. Medvedev, V. P. Tarasenko. — M. : Nauka, 1967. — 456 s.
2. Medvedev G. A. Stokhasticheskie modeli procentnyh stavok / G. A. Medvedev. — LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr, 2011. — 286 s.
3. Sornette D. Kak predskazyvat' krahi finansovyh rynkov: kriticheskie sobytija v slozhnyh finansovyh sistemah / D. Sornette. — M. : Smart-Book, 2008. — 399 s.
4. Cox J. A Theory of term structure of interest rate / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // Econometrica, 1985. — Vol. 53. — P. 385–407.
5. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1981. — Vol. 3. — P. 637–654.
6. Linther J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / J. Linther // Review of Economics and Statistics. — 1965. — Vol. 47. — P. 13–37.
7. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of investment / H. Markowitz. — New York : Wiley, 1959.
8. Sharpe W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk / W. Sharpe // Journal of Finance. — 1964. — Vol. 19. — P. 425–442.
9. Merton R. An intertemporal capital asset pricing model / R. Merton // Econometrica. — 1973. — Vol. 41. — P. 867–888.