УДК 519.86:330.46

ЗАГАЛЬНА МОДЕЛЬ ІСНУВАННЯ ЯК СИСТЕМА ФУНКЦІЙ ТА ЇХ СПІВВІДНОШЕНЬ

НАКВАСЮК Н., аспірант Прикарпатського національного університету ім. Василя Стефаника (Івано-Франківськ)

Дослідження тривалості існування – нечітко окреслений термін, який охоплює різні статистичні способи аналізу з урахуванням випадкових чинників. Його завданням є побудова моделі існування, дослідження властивостей і характеристик, окреслення статистичних процедур та оцінка їхніх параметрів на основі емпіричних даних, а також використання цих даних із метою прогнозування діяльності людської популяції та інших об'єктів.

Моделлю аналізу існування може бути рух правдоподібності випадкової величини T із чітко вказаними параметрами. В основному вони застосовуються в технічних, медичних та (частково) суспільних розрахунках. Такі моделі не завжди мають уточнені параметри і представлені через загально відому функцію розподілу. У першому випадку маємо на увазі параметричний підхід для моделювання, у другому – навпаки.

Вплив випадкових величин на аналіз тривалості існування вимагає певних пояснень. У даному дослідженні типовою випадковою величиною є час, що спливає до певного моменту ("час до..."), який випробовують певні об'єкти однорідної популяції. Наприклад, час, що спливає до певного пошкодження фізичного компоненту (механічного чи електричного або якогось приладу) або до біологічної смерті одиниці (пацієнта, тварини) тощо. У кожному такому випадку час виражається через стандартні одиниці (хвилини, дні, місяці, роки), і відлік ведеться від чітко визначеного початкового моменту до моменту настання події, яка нас цікавить, що визначається як досліджуваний об'єкт. Їх вимір незалежний від календарного часу, тобто немає великого значення, від якої загальної календарної дати розпочнеться вимір часу, котрий спливає доти, доки настане потрібна подія. У такому розумінні змінна може приймати будь-яку величину з інтервалу від 0 до t.

Якщо випадкова величина T на певному проміжку часу неперервна (наприклад, час), то для аналізу процесу потрібно використовувати неперервну модель [1]. Для дослідження проблеми оцінки моделі існування потрібно виокремити: форму і зміст показникових даних; оцінку; спрощені принципи моделі.

Наприклад, у традиційному статистичному підході здійснюються оглядові дослідження на основі даних страхових компаній та пенсійних фондів, а також використовуються методи оцінки моделі [2]. У статистичних дослідженнях домінує непараметричний підхід. Різноманітність у цьому діапазоні досить значна і залежить від галузі застосування.

Метою статті є аналіз тривалості існування та побудова моделі існування як системи функцій та їх співвідношень для прогнозування діяльності людської популяції та інших об'єктів.

1. Модель існування як розподіл ймовірностей

Модель існування є визначенням ймовірності конкретної випадкової величини, яка приймає тільки додатне значення:

- припустимо, що обладнання для дослідження було встановлене в лабораторії з кімнатною температурою. Обладнання ввели в експлуатацію в час t=0. Нас цікавить, як воно буде працювати в довільному часі t у майбутньому. Випадкова величина є часом справної роботи обладнання;
- людина народжується, скажімо, у час t=0. Нас цікавить час її існування, особливо скільки вона проживе;
- припустимо, що працівник працює в конкретній фірмі в час t=0. Нас цікавить, як довго він буде працювати. Випадковою величиною є закінчення стажування;
- працівник втрачає роботу і реєструється на біржі як безробітний у час t=0. Очікує нової роботи. Випадковою величиною є час, який людина перебуває без роботи;
- людина потрапила до лікарні з хворобою, потребує госпіталізації у час t=0 і перебуває у лікарні до одужання. Час перебування в лікарні є випадковою величиною;
- на підприємстві організовується страйк, який розпочинається у певний час t=0. Час тривання страйку є випадковою величиною;
- чоловік сорока років хоче застрахувати своє життя (t=0). Цікаво, чи він може застрахуватися (умовно), що проживе 20 років;

- власник автомобіля у час t=0 застрахував його на рік. Нас цікавить чи протягом року він пошкодить авто, вимагаючи відшкодування;
- людина втратила житло, яке застраховане від пожежі. Нас цікавить час, який спливає від повідомлення про пожежу до виплати відшкодування.

У наведених прикладах не йдеться про календарний час як такий, а лише про час, що спливає від моменту "появи" об’єкта до моменту настання якоїсь важливої події для об’єкта та дослідження цієї події, при цьому припускаємо, що об’єкт у даній ситуації можемо досліджувати тільки раз. Час, що спливає, може бути окреслений порізному, залежно від предмета досліджуваного процесу (негативного чи позитивного характеру обставин). У літературі використовуються різні терміни: *час тривалості*, *час перебування, час працездатності* (справного стану) та ін. Щоб не вживати різноманітних термінів, називатимемо цей час часом настання події.

Визначення моделі рівня існування як показника випадкової величини T свідчить, що його може репрезентувати довільна функція теорії ймовірності, яка описує ці показники. Модель рівня існування часто співпадає з теорією ймовірності, яку можна вивести з функції густини ймовірності додатково окресленої випадкової величини чи при певних умовах, а також умовними і безумовними її параметрами. Такий підхід можна вивести з того, що сама функція густини, на відміну від інших функцій, на практиці застосовується дуже рідко, оскільки складна для інтерпретації. Однак це не має великого значення, коли функції густини відповідають інші функції. Про модель, яка не приймає конкретної математичної величини теорії ймовірності, говоритимемо як про загальну модель рівня існування.

2. ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ГУСТИНИ ТА ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ДЛЯ МОДЕЛІ АНАЛІЗУ ІСНУВАННЯ

Припустимо, що величина T представляє час настання події чи час тривалості, це безперервна випадкова величина, яка може приймати значення з інтервалу $(0,\infty)$, хоча верхня межа для більшості практичних завдань є кінцевою і може бути описана за допомогою функцій теорії ймовірності. Основними функціями є функція густини ймовірності та функції розподілу.

Функція густини ймовірності $f(t)$ є невід’ємною функцією, яка задається рівнянням $\int_0^\infty f(t)dt = 1$. Вона представляє ймовірність настання події в тому змісті, що $f(t)\Delta t$ можна розуміти як наближення ймовірності, що подія наступить у час t. Для довільних дійсних t_1 і t_2, де $t_2 > t_1$, маємо $P(t_1 < T \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Функція $f(t)$ є безумовною густиною, однак єдиною умовою є те, що об’єкт появився в час t=0.

В емпіричних дослідженнях функція густини використовується для наближення емпіричного розподілу кількості подій у виокремлених відрізках часу тривання. Можливість вивчення функції густини залежить насамперед від специфіки досліджуваного процесу (механізму, який генерує розподіл).

Функція розподілу $F(t)$ випадкової величини T є функцією, яка описує ймовірність того, що об'єкт буде учасником події в інтервалі часу (0, t):

$$F(t) = P(T \le t)\,. \tag{1}$$

У розподілі часу тривання вона виконує умови: $F(0)=0$ та $F(\infty)=1$. У дослідженнях вона використовується для опису емпіричного розподілу кількості об'єктів, які взяли участь у цій події в певних моментах часу тривання.

Між функцією густини ймовірності та функцією розподілу таке співвідношення:

$$f(t) = dF(t)/dt\,, \tag{2}$$

$$F(t) = \int_0^t f(u)du\,. \tag{3}$$

Функція тривання $S(t)$ зустрічається в різних застосуваннях як функція доживання або існування, вона є доповненням функції розподілу до значення:

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t)\,. \tag{4}$$

Вона визначає ймовірність події, відмінної від події $T \le t$, тобто події, коли об'єкт досягне часу t, чи буде тривати довше, ніж t, і не буде учасником події перед тим, або час t пройде. Ймовірність часто позначається символом ${}_tp_0$. Функція існування $S(t)$ є спадною і виконуються умови: $S(0)=1$ та $S(t)\to 0$, де $t\to\infty$ (*рис. 1*). У дослідженнях вона використовується для опису емпіричного розподілу кількості об'єктів, які пережили певні моменти часу тривання, не беручи участі у події.

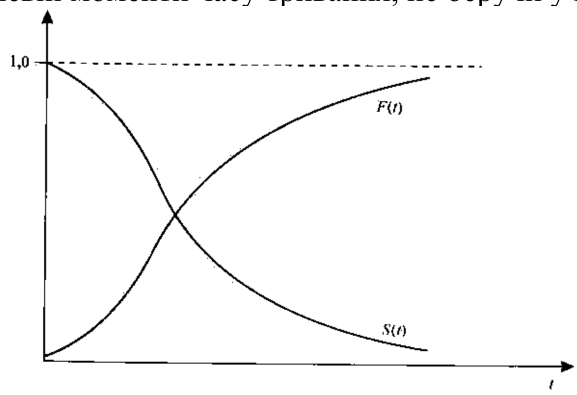

Рис. 1. Функція розподілу і функція існування розподілу часу тривання

Відповідно до рівнянь (2–4), співвідношення між функціями густини та існування можна записати таким чином:

$$f(t) = -dS(t)/dt\,, \tag{5}$$

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(u)du\,, \tag{6}$$

де верхню межу інтегралу прийнято умовно як +∞, хоча в дійсності вона скоріше є невідомою кінцевою величиною.

Функція існування $S(t)$ та її графічний образ – крива існування (див. *рис. 1*) – становлять ключові поняття в аналізі існування.

Відомі функції $f(t)$, $F(t)$ або $S(t)$ дозволили розрахувати ймовірність події типу $P(t_1<T\leq t_2)$, або що об'єкт не належить інтервалу від t_1 до t_2 або інакше: певна подія належить даному інтервалу часу існування. Можна це виразити за допомогою кожної з наведених вище функцій:

- густини – $P(t_1<T\leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$,
- розподілу – $P(t_1<T\leq t_2) = F(t_2) - F(t_1)$,
- існування – $P(t_1<T\leq t_2) = S(t_2) - S(t_1)$.

Розрахунок цієї ймовірності можливий, якщо відомі параметричні види цих функцій, що розглянуті у 5-му розділі).

3. Функція інтенсивності процесу та її співвідношення з іншими функціями

Описані три функції – не єдині величини, пов'язані з часом існування. Особливе значення має *функція інтенсивності* або *інтенсивність події*. Згідно з метою її впровадження розглянемо такий випадок: об'єкт певної події в інтервалі часу (t, $t+\delta t$), при припущенні, що до моменту t така подія не досліджувалася. Ймовірність такого випадку є умовною:

$$P(t<T\leq t+\delta t|T>t). \tag{7}$$

Для уточнення, що це є функція часу існування, використаємо запис:

$$P(t<T\leq t+\delta t|T>t)=\lambda(t)\delta(t). \tag{8}$$

Згідно з основним виразом розрахунку ймовірності, що ймовірність $P(A/B) = P(AB)/P(B)$ випадкова, вираз (8) представимо у вигляді:

$$\frac{P(t < T \leq t + \delta t, T > t)}{P(T > t)} = \lambda(t)\delta t\,. \tag{9}$$

Оскільки для випадків: $(t < T \le t + \delta t)$ і $(T > t)$ виконується співвідношення $(t < T \le t + \delta t) \subseteq (T > t)$, то можемо записати:

$$P(t<T\le t+\delta t|T>t)=P(t<T\le t+\delta t), \tag{10}$$

а співвідношення (9) представимо у вигляді:

$$\frac{P(t < T \le t + \delta t)}{P(T > t)} = \lambda(t)\delta t . \tag{11}$$

Перейдемо до границі співвідношення (11) при $\delta t \to 0$:

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{P(t < T \le t + \delta t)}{\delta t} \frac{1}{P(T > t)},$$

маємо такий результат:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} . \tag{12}$$

Функцію $F(t)$ назвемо *інтенсивністю події* (шлюбів, розлучень, пошкоджень, смертей, народжень, випадків та ін.).

Рівняння (12) – уявна залежність інтенсивності події від функції густини і функції розподілу або функції існування. Доцільно виразити функцію виключення функцією існування. Відомо, що $f(t) = F'(t) = -S'(t)$, тобто можна записати:

$$\lambda(t) = \frac{-S'(t)}{S(t)}, \tag{13}$$

і це є швидкість відносної функції $S(t)$, взятої з від'ємним знаком. Якщо, крім того, врахувати, що швидкість відносно даної функції рівна її логарифмічній похідній, то інтенсивність події можемо представити у вигляді рівноваги:

$$\lambda(t) = -\frac{d \ln S(t)}{dt} . \tag{14}$$

Інтенсивність $\lambda(t)$ – умовна функція густини настання події в момент часу t за умови, що до цього моменту об'єкт не належав цій події. Інтенсивність є локальною характеристикою досліджуваного процесу, описуючи його нестабільність (або стабільність) у часі певної події. Інакше кажучи, ця функція інформує як із плином часу змінюється схильність об'єкта до певної події. Це так зване "явище інерційності" [3].

Рівняння (12–14) виражають залежність інтенсивності випадків $\lambda(t)$ від функції розподілу $F(t)$ і функції існування $S(t)$. Щоб виразити $F(t)$ і $S(t)$ як функції інтенсивності, порахуємо рівняння (14) в інтервалі від 0 до t:

$$\int_0^t \lambda(u)du = -\int_0^t d\ln S(u), \tag{15}$$

і приймемо початкову умову $S(0) = 1$. Отримаємо:

$$\ln S(t) = -\int_0^t \lambda(u)du, \tag{16}$$

остаточно:

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right], \tag{17}$$

а також:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]. \tag{18}$$

Для спрощення запису скористаємося часовою функцією:

$$\Delta t = \int_0^t \lambda(u)du = -\ln S(t), \tag{19}$$

так звана *"накопичувальна функція інтенсивності"*, і в той же час вираз (17) запишемо як:

$$S(t) = e^{-\Delta t}. \tag{20}$$

При цьому треба зауважити, що рівняння (17) і (18) можна використовувати не для кожної функції $\lambda(t)$, а тільки тоді, коли $\int_0^t \lambda(u)du \to \infty$ для $t \to \infty$.

Згідно вище поданих залежностей функцію густини $f(t)$ від інтенсивності $\lambda(t)$ можемо виразити у вигляді:

$$f(t) = \lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]. \tag{21}$$

Усі ці важливі функції і складають модель існування. Ці функції, а також залежності між ним представлені в *таблиці*.

Залежність між функціями моделі існування

$S(t)=$	$S(t)$	$1-F(t)$	$\int_t^{\infty}\lambda(u)du$	$\exp\left[-\int_0^t\lambda(u)du\right]$	$e^{-\Delta(t)}$
$F(t)=$	$1-S(t)$	$F(t)$	$\int_0^t\lambda(u)du$	$1-\exp\left[-\int_0^t\lambda(u)du\right]$	$1-e^{-\Delta(t)}$
$f(t)=$	$-\frac{dS(t)}{dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t)\exp\left[-\int_0^t\lambda(u)du\right]$	$-\frac{de^{-\Delta(t)}}{dt}$
$\lambda(t)=$	$-\frac{d\ln S(t)}{dt}$	$-\frac{d\ln[1-F(t)]}{dt}$	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty}\lambda(u)du}$	$\lambda(t)$	$\frac{d\Lambda(t)}{dt}$
$\Lambda(t)=$	$-\ln S(t)$	$-\ln[1-F(t)]$	$\frac{\int_0^t\lambda(u)du}{\int_0^t\lambda(z)dz}$	$\int_0^t\lambda(u)du$	$\Lambda(t)$

На закінчення цих висновків подамо важливий вираз, який описує співвідношення між двома різними величинами: функцією існування і функцією інтенсивності процесу. Для цього запишемо рівняння (16) у вигляді:

$$\int_0^t\lambda(u)du=-\ln S(t)\,. \tag{22}$$

Для двох різних величин часу існування t_1 і t_2 ($t_1<t_2$) матимемо:

$$\int_0^{t_1}\lambda(u)du=-\ln S(t_1)\quad \text{і}\quad \int_0^{t_2}\lambda(u)du=-\ln S(t_2)\,. \tag{23}$$

Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо:

$$\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du=\ln S(t_1)-\ln S(t_2)\,, \tag{24}$$

а шуканий вираз запишемо остаточно у вигляді:

$$\frac{S(t_2)}{S(t_1)}=\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right] \tag{25}$$

або:

$$S(t_2) = S(t_1)\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right]. \qquad (26)$$

Враховуючи зміст функції існування $S(t)$, можна стверджувати, що вираз (25) описує ймовірність того, що об'єкт не належить події в інтервалі часу (t_1, t_2). Таку ймовірність записують за допомогою символу $p(t_1, t_2)$ або ${}_{t_2-t_1}p_{t_i}$. Знайдені вирази представляють не залежність між ймовірностями, які належать чи не належать події в даному інтервалі часу існування, а інтенсивність процесу. Отже, підсумуємо отримане:

$$p(t_1,t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right], \qquad (27)$$

$$q(t_1,t_2) = 1 - p(t_1,t_2) = \frac{S(t_1)-S(t_2)}{S(t_1)} = 1-\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right]. \qquad (28)$$

4. Параметри розкладу часу існування як характеристики процесу існування

Крім поданих вище функцій для характеристики процесу існування широко використовуються параметри розкладу часу існування, перш за все величини очікування і дисперсія.

Величина очікування випадкової змінної T:

$$E(t) = m = \int_0^t tf(t)dt, \qquad (29)$$

описує середній час існування (життя) об'єкта даного виду в окреслених умовах.

Відповідно до рівняння (5), величину очікування представимо як:

$$m = -\int_0^t tdS(t) = \int_0^t S(t)dt; \qquad (30)$$

величину очікування можна потім визначити з функції густини ймовірності часу існування або з функції існування. У другому випадку вона рівна площі поверхні під кривою існування (*рис. 2*).

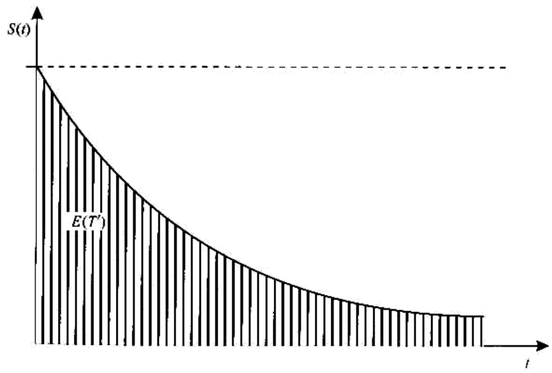

Рис. 2. Величина змінної очікування у функції існування

Дисперсія випадкової змінної T представляється виразом:

$$\sigma^2 = \int_0^t (t-m)^2 f(t)dt\,, \tag{31}$$

який залежно від функції існування можна записати у вигляді:

$$\sigma^2 = 2\int_0^t tS(t)dt - m^2\,. \tag{32}$$

Медіану випадкової змінної T називають часом півіснування, який визначають як величину $t = me$ цієї випадкової змінної, для якої справджується рівність:

$$S(me) = F(me) = 0{,}5\,. \tag{33}$$

Відповідно, це така величина часу існування, яка осягає 50 % об'єктів, інші ж 50 % об'єктів цього часу є неосяжними для так званої "ранньої події". Обґрунтування застосування такого терміна, як "пів" застосовується до набору об'єктів, а не до часу. У демографічній термінології медіану часу існування називають *ймовірністю існування.*

Скориставшись ще функцією густини, медіану можемо виразити за допомогою рівняння:

$$\int_0^{me} f(t)dt = 0{,}5\,, \tag{34}$$

обидві інтерпретації, відповідно до виразів (33–34), графічно зображено на *рис. 3*.

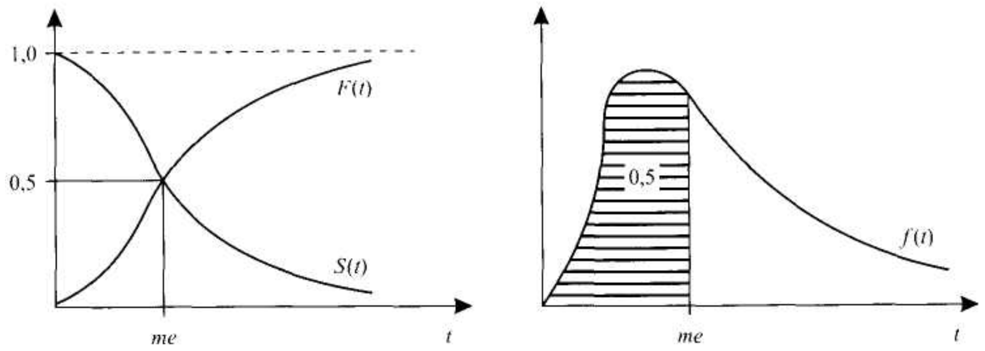

Рис. 3. Графічне зображення половини часу існування

Із виразів (4) і (33) випливає, що медіана часу існування це проекція точки середини кривих $F(t)$ і $S(t)$. У такий спосіб можна визначити будь-яку квантиль розкладу t_p ряду p.

5. РОЗКЛАД УМОВНОГО ЧАСУ ІСНУВАННЯ ТА ЙОГО ПАРАМЕТРИ

Крім функції часу, існує й інша можливість охарактеризувати процес існування. До цього часу ми розглядали час настання події, отже й час, який спливає від моменту зацікавлення об'єктом і до моменту настання якогось особливого випадку. Можна розглянути і *подальше існування об'єкта* в описаному стані, в якому він уже існує певний час, наприклад, подальше життя чоловіка, який прожив уже 30 років. Подібно до часу існування, час подальшого існування є також випадковою змінною. Розклад часу подальшого існування відрізняється від розкладу часу існування за умови, що інтенсивність процесу не є сталою в часі. Для цієї нової випадкової змінної можемо записати функцію ймовірності і параметри.

Приймемо, що об'єкт проіснував до часу $T=t$, і не належить події, яка нас цікавить (наприклад, людина дожила до 40 років і живе далі, працівник допрацював до повного стажу і працює далі). Нас цікавить випадок, чи об'єкт буде існувати ще при часі τ (наприклад, людина працює ще 10 років, працівник не звільняється з фірми через рік). Ймовірність такої події є випадковою:

$$P(T > t + \tau \mid T > t) = \frac{P(T > t + \tau, T > t)}{P(T > t)}. \qquad (35)$$

Оскільки подія $(T > t + \tau)$ виключає у події $(T > t)$, то ймовірність, що нас цікавить, можемо записати як:

$$P(T > t + \tau \mid T > t) = \frac{P(T > t + \tau)}{P(T > t)}. \qquad (36)$$

Скориставшись раніше описаними функціями і співвідношеннями між ними (рівняння 4 і 17) і позначивши шукану ймовірність через $S_t(\tau)$, отримаємо:

$$S_t(\tau) = \frac{S(t+\tau)}{S(t)} = \exp\left[-\int_t^{t+\tau} \lambda(u)du\right]. \tag{37}$$

$S_t(\tau)$ назвемо *функцією подальшого існування* (життя, стажу та ін.). У соціальній літературі (і частково в демографічній) цю ймовірність позначають символом ${}_\tau p_t$.

Потрібно зауважити, що отриманий результат ідентичний із виразом (25). По суті, якщо виходити з рівняння (16), то для двох величин випадкової змінної T: t і $t + \tau$ ($\tau > 0$), отримаємо:

$$\ln S(t) = -\int_0^t \lambda(u)du\,, \tag{38}$$

а також:

$$\ln S(t+\tau) = -\int_0^{t+\tau} \lambda(u)du\,. \tag{39}$$

Злогарифмовані рівняння (38) і (39) представляють відповідно ймовірності того, що об'єкт буде існувати до часу t і $t + \tau$. Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо:

$$\ln \frac{S(t+\tau)}{S(t)} = -\int_t^{t+\tau} \lambda(u)du\,. \tag{40}$$

Остаточно, як і вираз (37), можемо записати:

$$\frac{S(t+\tau)}{S(t)} = \exp\left[-\int_t^{t+\tau} \lambda(u)du\right].$$

Функція $S_t(\tau)$ описує ймовірність того, що об'єкт буде існувати щонайменше до часу $t + \tau$, рахуючи від моменту t, або що він не належить події (не помер, не звільнився з роботи тощо) в інтервалі часу $(t, t + \tau)$.

Для часу подальшого існування, як для випадкової змінної, можемо записати функцію густини, яка описана рівнянням (5). Відрізнити функції складно, адже:

$$f_t(\tau) = -\frac{dS_t(\tau)}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau}\left\{\exp\left[-\int_t^{t+\tau} \lambda(u)du\right]\right\}.$$

Застосувавши твердження Лейбніца-Ньютона [4], отримаємо:

$$f_t(\tau)=\left\{\frac{d}{d\tau}\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du\right\}\exp\left[-\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du\right]=\lambda(t+\tau)\exp\left[-\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du\right], \quad (41)$$

або вираз для умовної функції густини, подібний до виразу (21) для безумовної функції густини ймовірності часу існування.

Умовну функцію густини можна остаточно записати у вигляді:

$$f_t(\tau)=\lambda(t+\tau)S_t(\tau), \quad (42)$$

при цьому $\int_0^t f_t(\tau)d\tau=1$. Сума функцій $f_t(\tau)$ не має великого практичного значення в аналізі існування.

Інтенсивність процесу подальшого існування отримаємо ще з виразу (12):

$$\lambda_t(\tau)=\frac{f_t(\tau)}{S_t(\tau)}=\lambda(t+\tau). \quad (43)$$

Важливою характеристикою часу подальшого існування є величина очікування, інша назва якої *середня довжина існування* (життя, стажу тощо). Згідно з визначенням величини очікування, вона дорівнює:

$$m_t=\int_0^t \tau f_t(\tau)d\tau. \quad (44)$$

Відповідно до рівнянь (30) і (37), m_t запишемо в іншому вигляді:

$$m_t=\int_0^t S_t(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{S(t+\tau)}{S(t)}d\tau. \quad (45)$$

Якщо верхня границя часу існування є скінченою і винести ω, то число належить брати від 0 до $\omega-t$.

Винесемо перед інтеграл величину $S(t)$, як сталу відносно τ, і, змінивши межі інтегрування остаточно, отримаємо:

$$m_t=\frac{1}{S(t)}\int_0^t S(u)du, \quad (46)$$

де $S(t)$ під знаком інтегралу є функцією існування, вже описана формулами (6) або (17).

У геометричній інтерпретації середня довжина існування об'єкта, який існує час t, дорівнює частині площі під кривою існування, вище точки t і за умови відсутності жодної точки існування в цій точці (*рис. 4*). Якщо інтенсивність процесу є малою (наприклад, малою є інтенсивність звільнення працівників з фірми), то середня довжина існування буде відрізнятися функцією часу. Тобто, докладний перебіг функції середньої довжини існування невідомий, якщо не описаний аналітичний вигляд функції $S(t)$ або іншої пов'язаної з нею функції.

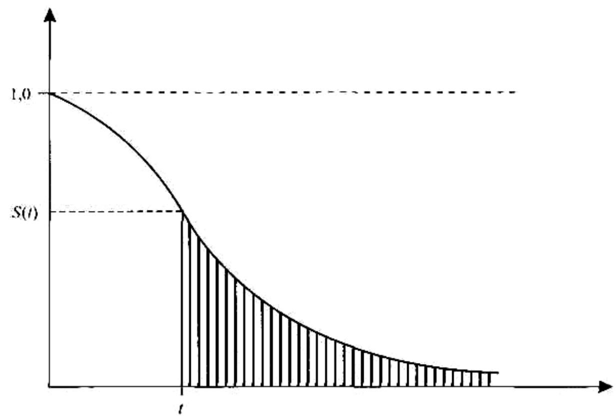

Рис. 4. Середня довжина існування відповідної функції існування

Важливою характеристикою розкладу часу подальшого існування є дисперсія σ_t^2. Запишемо її як:

$$\sigma_t^2 = \int_0^t (\tau - m_t)^2 f_t(\tau) d\tau , \tag{47}$$

або аналогічно до виразу (32) у вигляді:

$$\sigma_t^2 = 2\int_0^t \tau S_t(\tau) d\tau - m_t^2 .$$

Дисперсію часу подальшого існування можна виразити залежно від безумовної функції існування:

$$\sigma_t^2 = \frac{2}{S(t)} \int_0^t uS(u) du - m_t^2 . \tag{48}$$

Для малої інтенсивності процесу дисперсія часу подальшого існування є різницею функцій часу. Аналогічно до медіани часу існування можемо описати медіани в розкладі часу подальшого існування.

У демографічних застосуваннях цю величину називають *ймовірністю подальшого існування*. Це така величина $\tau = me(t)$ випадкової змінної T_t, для якої виконується співвідношення:

$$S_t\{me(t)\} = 0{,}5\,, \tag{49}$$

або:

$$\int_0^{me(t)} f_t(\tau)d\tau = 0{,}5\,. \tag{50}$$

Взявши першу частину з рівняння (37), умову (49) можемо записати залежно від безумовної функції існування $S(t)$ у такому вигляді:

$$S\{t + me(t)\} = \frac{1}{2}S(t)\,. \tag{51}$$

Таким чином, для кожної величини $t < t_{\max}$ випадкової змінної T завжди можемо знайти таку точку $t + me(t)$, в якій величина функції $S(t)$ буде у два рази меншою, ніж у точці t (*рис. 5*).

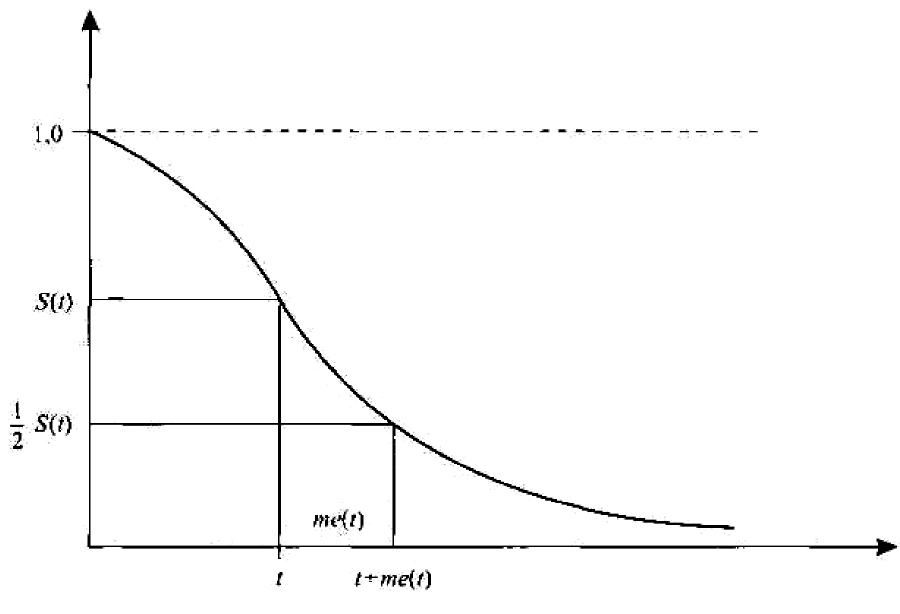

Рис. 5. Медіана подальшого існування у співвідношенні з функцією існування

Отже, проаналізовано різні можливості дослідження функцій тривалості життя та її співвідношень з іншими функціями, які слугують для побудови моделі існування (життя), а також висвітлено властивості й характеристики цих функцій, окреслено статистичні процедури та оцінено їх параметри на основі емпіричних даних. Крім того, проаналізовано використання цих даних з метою прогнозування діяльності людської популяції та інших об'єктів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Cohen A. C.* Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models. Marcel Dekker / A. C. Cohen, B. J. Whitten. — New York, 1988.
2. *Bartholomew D. J.* Stochastic Models for Social Processes, wyd. 3, Wiley / D. J. Bartholomew. — London, 1982.
3. *Morrison D. G.* Jobs, Strikes and Wars; Probability Models for Duration / D. G. Morrison, C. C. Schmittlein // Organizational Bahavior and Human Performance. — 1980. — № 25.
4. *Демидович Б. П.* Раздел 3. Формула Ньютона-Лейбница / Б. П. Демидович // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М. : Наука, 1990. — (Курс высшей математики и математической физики).